

Norman May

B6, 29, Raum C0.05

68131 Mannheim

Telefon: (0621) 181-2517

Email: norman@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Matthias Brantner

B6, 29, Raum C0.05

68131 Mannheim

Telefon: (0621) 181-2517

Email: msb@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Algorithmen und Datenstrukturen
Wintersemester 2004/0512. Lösungsvorschlag
04. Februar 2005

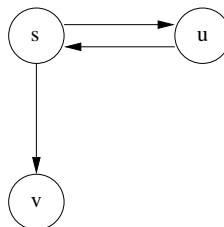
Aufgabe 1

4 Punkte

Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das folgende Behauptung widerlegt. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph in dem ein Pfad vom Knoten u zum Knoten v existiert. Wenn für die während einer Tiefensuche ermittelten Entdeckungszeiten $d[u] < d[v]$ gilt, dann ist in dem erzeugten Tiefensuche-Wald v ein Nachfolger von u .

Lösung

Der folgendende Graph zeigt ein Gegenbeispiel.



Eine Tiefensuche beginnt im Knoten s besucht Knoten u und dann Knoten v . Offensichtlich existiert ein Pfad von u nach v und es gilt $d[u] < d[v]$, aber v ist kein Nachfolger von u im Tiefensuche-Wald.

Aufgabe 2

4 Punkte

Beschreiben Sie die Funktionsweise des Algorithmus zum Finden von *Starken Zusammenhangskomponenten* aus der Vorlesung anhand des Graphen aus Abbildung ???. Geben Sie den Tiefensuche-Wald der durch den Aufruf $\text{DFS}(G^T)$ in Zeile 3 des Algorithmus berechnet wird und den resultierenden *Komponentengraph* an.

Lösung

Der resultierende Tiefensuche-Wald ist in Abbildung ??? zu sehen. Der entsprechende Komponentengraph in Abbildung ??? (jeweils 2 Punkte).

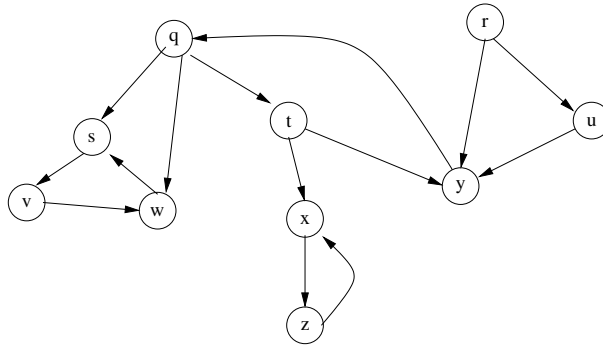


Abbildung 1: Graph

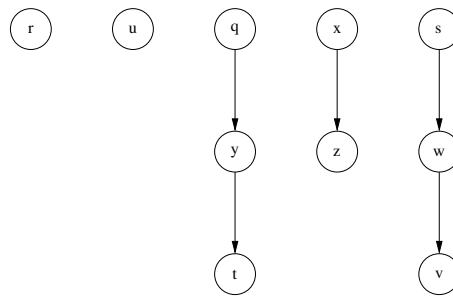


Abbildung 2: Tiefensuche-Wald

Aufgabe 3

2 Punkte

Wie kann die Anzahl der *Starken Zusammenhangskomponenten* in einem gerichteten Graphen durch Hinzufügen einer Kante beeinflusst werden?

Lösung

Durch die Hinzunahme einer Kante bleibt die Anzahl der *Starken Zusammenhangskomponenten* gleich oder wird verringert.

Fall 1 Es wird eine Kante zwischen zwei bestehenden *Starken Zusammenhangskomponenten* eingefügt:

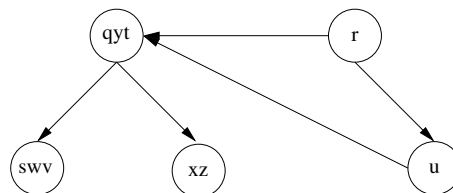


Abbildung 3: Komponentengraph

- Die beiden Komponenten werden zu einer: \implies die Anzahl der Komponenten verringert sich um eins.
- Die Anzahl der Komponenten bleibt gleich, da noch keine Kante zwischen den Komponenten bestand (**starke** Zusammenhangskomponenten).

Fall 2 Es wird eine Kante innerhalb einer bereits bestehenden *Starken Zusammenhangskomponente* eingefügt:

\implies Die Kante beeinflusst die Anzahl der Komponenten nicht, da sie nur eine bereits bestehende Komponente betrifft.

Aufgabe 4

5 Punkte

Ein gerichteter Graph $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$ ist ein *Komponentengraph* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, wenn aus jeder *Starken Zusammenhangskomponente* von G genau ein Knoten in V^{SCC} enthalten ist. Für alle $(u, v) \in E^{SCC}$ gilt, es existiert eine gerichtete Kante in G , die von einem Knoten der durch u repräsentierten *Starken Zusammenhangskomponente* auf einen Knoten der durch v repräsentierten *Starken Zusammenhangskomponente* zeigt. Zeigen Sie, daß ein *Komponentengraph* immer einen DAG bildet.

Lösung

Zu zeigen ein Komponentengraph ist ein DAG.

Aus der Definition folgt, daß der Komponentengraph gerichtet ist. Es bleibt zu zeigen, daß ein Komponentengraph azyklisch ist.

Widerspruchsbeweis:

Annahme: Ein Komponentengraph enthält einen Zyklus und seien X und Y zwei unterschiedliche Knoten in einem Zyklus. Sei u ein Knoten aus der Komponente X und v ein Knoten aus der Komponente Y , dann sind u und v aus zwei verschiedenen *Starken Zusammenhangskomponenten*. Da aber X und Y Teil eines Zyklusses sind, muß ein Pfad von u nach v und ein Pfad von v nach u existieren, was ein Widerspruch dazu ist, daß u und v zu unterschiedlichen Komponenten gehören.

Aufgabe 5

4 Punkte

Beschreiben Sie die Funktionsweise des Algorithmus von Prim zur Bestimmung eines *minimalen Spannbaums* anhand des Graphen aus Abbildung ???. Starten Sie dabei mit Knoten V und geben Sie nach jedem Schritt den entstehenden Graphen an.

Lösung

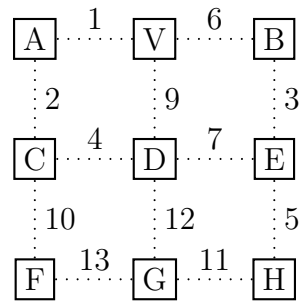
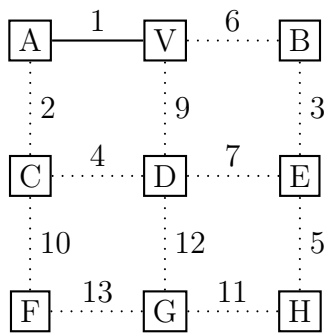
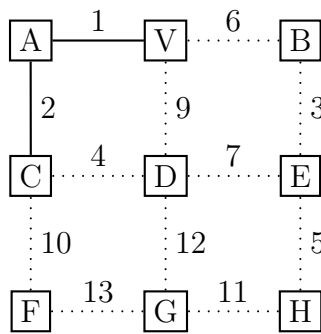


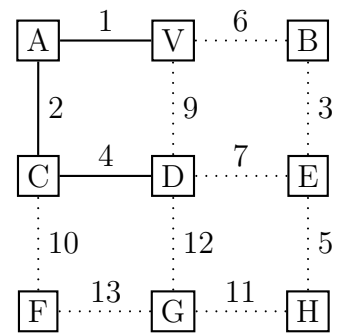
Abbildung 4: Beispiel zur Anwendung des Algorithmus von Prim



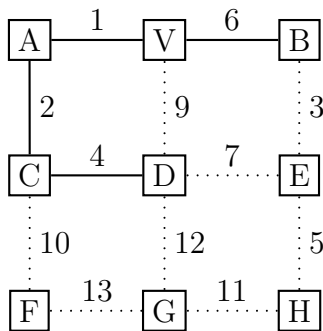
(a) Schritt 1



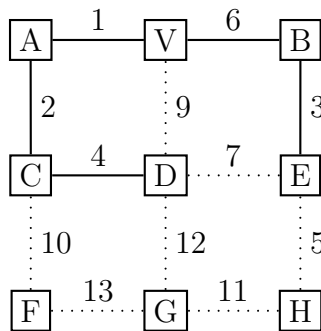
(b) Schritt 2



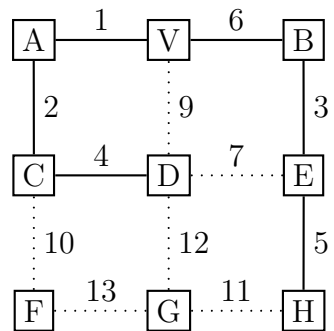
(c) Schritt 3



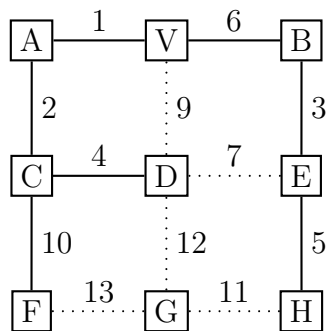
(d) Schritt 4



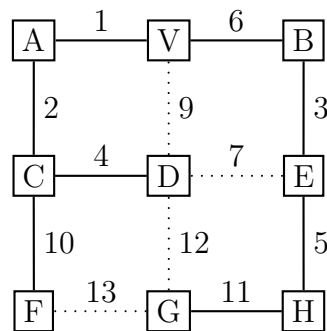
(e) Schritt 5



(f) Schritt 6



(g) Schritt 7



(h) Schritt 8

Abbildung 5: Lösung zur Anwendung des Algorithmus von Prim