Lehrstuhl für Praktische Informatik III

Norman May
B6, 29, Raum C0.05
68131 Mannheim
Telefon: (0621) 181–2517
Email: norman@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Matthias Brantner
B6, 29, Raum C0.05
68131 Mannheim
Telefon: (0621) 181–2517
Email: msb@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Algorithmen und Datenstrukturen — 2. Lösungsvorschlag

Wintersemester 2004/05 — 12. November 2004

Definitionen:

Stirling Approximation

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Aufgabe 1 — 16 Punkte

Aufgabe 1 a) — 5 Punkte

Zeigen Sie, dass $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$ gilt.

Lösung

Zu zeigen: $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$. Es gibt zwei mögliche Beweise:

1. Mittels der Stirling Aproximation:

$$\begin{aligned}\lg(n!) &= \lg(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right))\\ &= \lg\left(\sqrt{2\pi n}\right)+\lg\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)+\lg\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lg\left(\sqrt{2\pi n}\right)+n\lg n-n\lg e+\lg\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

mit $f(n)+g(n) = \Theta(max(f(n), g(n))$ (siehe 1. Übungsblatt) folgt:

$$\lg\left(\sqrt{2\pi n}\right)+n\lg n-n\lg e+\lg\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \Theta(n\lg n)$$

2. Mittels Summenbeschränkung:

$$\lg(n!) = \sum_{k=1}^{n}\lg k$$

Bestimmen einer oberen Schranke:

$$\sum_{k=1}^{n} \lg k \le \sum_{k=1}^{n} \lg n = n \lg n$$

Bestimmen der unteren Schranke:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lg k &\ge \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} \lg k \\
&\ge (n - \lceil n/2 \rceil + 1) \lg(\lceil n/2 \rceil) \\
&\ge \frac{n}{2} \lg\left(\frac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1 b) — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass $n! = o(n^n)$ gilt.

Lösung

Zu zeigen: $n! = o(n^n)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^n} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 0 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1 c) — 3 Punkte

Zeigen Sie, dass $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ gleich der leeren Menge ist.

Lösung

Zu zeigen: $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$
Beweis durch Widerspruch
Annahme: Es existiert ein $f(n) \in o(g(n)) \cap \omega(g(n))$.
Es existieren zwei mögliche Wege, den Widerspruch herzuleiten:

1. Dann existiert ein n_{0_1}, so daß für alle $c_1 > 0$ gilt

$$0 \le f(n) < c_1 g(n)$$

für alle $n \geq n_{0_1}$. Außerdem existiert ein n_{0_2}, so daß für alle $c_2 > 0$ gilt

$$0 \leq c_2 g(n) < f(n)$$

für alle $n \geq n_{0_1}$. Für $n_0 = max(n_{0_1}, n_{0_2})$ und für ein beliebiges $c > 0$ führt dies aber zum Widerspruch, da

$$cg(n) < f(n) < cg(n)$$

nicht gelten kann.

2. Aus der alternativen Definition von o und ω folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

was nicht beides gleichzeitig möglich ist. Daraus folgt der Widerspruch.

Aufgabe 1 d) — 4 Punkte

Seien $f(n)$ und $g(n)$ asymptotisch nicht-negative Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
3. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

Lösung

1. Gegenbeispiel: $f(n) = n$ und $g(n) = n^2$.
2. Gegenbeispiel: $f(n) = 2n$ und $g(n) = n$.
3. Zu zeigen: $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

   Sei

   $$g(n) = o(f(n)).$$

   Dann existiert ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

   $$0 \leq g(n) < cf(n)$$

für alle $c > 0$. Mit $c = 1$ gilt

$$0 \leq f(n) + g(n) < 2f(n)$$

für alle $n > n_0$. Also ist

$$f(n) + o(f(n)) = O(f(n)).$$

Außerdem gilt

$$0 \leq 1/2f(n) \leq f(n) + g(n)$$

Also ist

$$f(n) + o(f(n)) = \Omega(f(n)).$$

Somit gilt

$$f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n)).$$