

Norman May

B6, 29, Raum C0.05

68131 Mannheim

Telefon: (0621) 181-2517

Email: norman@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Matthias Brantner

B6, 29, Raum C0.05

68131 Mannheim

Telefon: (0621) 181-2517

Email: msb@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Algorithmen und Datenstrukturen
Wintersemester 2004/051. Lösungsvorschlag
4. November 2004**Definitionen:** **Θ -Notation**

$$\Theta(g(n)) := \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

 O -Notation

$$O(g(n)) := \{f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n)\}$$

Aufgabe 1

6 Punkte

Aufgabe 1 a)

2 Punkte

Seien $f(n)$ und $g(n)$ asymptotisch nicht negative Funktionen. Zeigen Sie:

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

Verwenden Sie die Definition der Θ -Notation!**Lösung**

Sei

$$h(n) = \max(g(n), f(n))$$

Zu zeigen: Es existiert $c_1, c_2, n_0 > 0$, so daß für all $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \leq c_1(f(n) + g(n)) \leq h(n) \leq c_2(f(n) + g(n))$$

Da $f(n)$ und $g(n)$ asymptotisch nicht negativ existiert ein n_0 , so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \leq f(n) \leq f(n) + g(n)$$

und

$$0 \leq g(n) \leq f(n) + g(n)$$

und somit:

$$0 \leq h(n) \leq f(n) + g(n).$$

Außerdem gilt für alle $n \geq n_0$:

$$0 \leq f(n) + g(n) \leq 2h(n)$$

Somit gilt für alle $n \geq n_0$:

$$0 \leq 1/2(f(n) + g(n)) \leq h(n) \leq f(n) + g(n)$$

Aufgabe 1 b)

2 Punkte

Seien a und b zwei beliebige Konstanten mit $b > 0$. Zeigen Sie:

$$(n + a)^b = \Theta(n^b)$$

Lösung

Es gilt geeignete Konstanten $c_1, c_2, n_0 > 0$ zu finden, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \leq c_1 n^b \leq (n + a)^b \leq c_2 n^b.$$

Es gilt:

$$n + a \leq n + |a| \leq 2n, \text{ falls } |a| \leq n.$$

und:

$$n + a \geq n - |a| \geq (1/2)n, \text{ falls } |a| \leq (1/2)n.$$

Somit gilt:

$$0 \leq (1/2)n \leq n + a \leq 2n, \text{ falls } n \geq 2|a|.$$

Da $b > 0$, ist dies äquivalent zu:

$$0 \leq (1/2)^b n^b \leq (n + a)^b \leq 2^b n^b.$$

Somit sind die gesuchten Konstanten $c_1 = (1/2)^b$, $c_2 = 2^b$ und $n_0 = 2|a|$.

Aufgabe 1 c)

2 Punkte

Sei a_i jeweils eine beliebige Konstante mit $a_d > 0$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^d a_i n^i = \Theta(n^d)$$

Lösung

Sei:

$$f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_1 n + a_0,$$

und

$$g(n) = n^d$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_d + a_{d-1}/n + \dots + a_1/n^{d-1} + a_0/n^d) \\ &= a_d + 0 + \dots + 0 + 0 \\ &= a_d \end{aligned}$$

Somit kann ein ϵ mit $0 < \epsilon < a_d$ gewählt werden, für das ein n_ϵ existiert, so daß für alle $n > n_\epsilon$ gilt:

$$a_d - \epsilon < f(n)/g(n) < a_d + \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$(a_d - \epsilon)g(n) \leq f(n) \leq (a_d + \epsilon)g(n)$$

Aufgabe 2

12 Punkte

Sei r eine beliebige positive Konstante. Geben Sie für folgende Summen asymptotische Grenzen mittels der Θ -Notation an.

Aufgabe 2 a)

4 Punkte

$$\sum_{k=1}^n \lg k$$

Lösung

Wir bestimmen zunächst eine obere Schranke:

$$\sum_{k=1}^n \lg k \leq \sum_{k=1}^n \lg n = n \lg n.$$

Die untere Schranke schätzen wir mit einem Integral ab (Die Stammfunktion von $\lg x$ ist $x \lg x - x$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lg k &= \lg 1 + \sum_{k=2}^n \lg k \\ &\geq \int_1^n \lg x \, dx \\ &= n \lg n - n + 1 \\ &> n \lg n - n \end{aligned}$$

Wegen $n \lg n - n = \Omega(n \lg n)$ existieren die gesuchten c_1 und n_0 . Wähle außerdem $c_2 = 1$.

Aufgabe 2 b)

4 Punkte

$$\sum_{k=1}^n 2^k/k!$$

Es genügt zu zeigen, daß die Reihe durch Konstanten beschränkt ist.

Lösung

Wir benutzen das Quotientenkriterium für Reihen. D.h. wir müssen zeigen, daß:
 $\exists r < 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} &= \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Es gilt: $2/(n+1) < 1$ für $n > 2$, und jedes Reihenglied ist positiv. D.h. wähle $n_0 > 2$.
Da die Reihe konvergiert, existiert eine Konstante $c > 0$ so daß $0 \leq \sum_{k=1}^n 2^k/k! < c$.

Aufgabe 2 c)

4 Punkte

$$\sum_{k=1}^n k^r$$

Lösung

Wir bestimmen zunächst eine obere Schranke:

$$\sum_{k=1}^n k^r \leq \sum_{k=1}^n n^r = n^{r+1}.$$

Um eine untere Schranke zu bestimmen, splitten wir die Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^r &= \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} k^r + \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n k^r \\ &\geq \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n k^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^r \\
&= \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^r \\
&\geq \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) \left(\frac{n}{2} \right)^r \\
&= \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) \left(\frac{n}{2} \right)^r \\
&> \left(\frac{n}{2} \right)^{r+1}
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^r = \Theta(n^{r+1})$$

mit $c_1 = (1/2)^{r+1}$, $c_2 = 1$ und $n_0 = 1$.

Aufgabe 3

2 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$2^{2n} = O(2^n)$$

Lösung

Zu zeigen:

$$2^{2n} \neq O(2^n)$$

Widerspruchsbeweis: Seien $c, n_0 > 0$ Konstanten, für die gilt:

$$0 \leq 2^{2n} \leq c2^n$$

für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt aber

$$2^n \leq c$$

was ein Widerspruch zur Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen ist.