

Norman May

B6, 29, Raum C0.05
68131 Mannheim
Telefon: (0621) 181-2517
Email: norman@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Matthias Brantner

B6, 29, Raum C0.05
68131 Mannheim
Telefon: (0621) 181-2517
Email: msb@pi3.informatik.uni-mannheim.de

Algorithmen und Datenstrukturen
Wintersemester 2004/05

8. Übungsblatt
15. Dezember 2004

Aufgabe 1

7 Punkte

Für 2 gegebene Strings $a = a_0a_1 \dots a_p$ und $b = b_0b_1 \dots b_q$, wobei jedes a_i und jedes b_j in einem Zeichensatz enthalten sind, nennen wir a *lexikographisch kleiner* als String b , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gibt eine Zahl j , mit $0 \leq j \leq \min(p, q)$, mit $a_i = b_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, j - 1$ und $a_j < b_j$, oder
2. $p < q$ und $a_i = b_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, p$

Wenn wir a und b als Bitstrings betrachten, dann ist $10100 < 10110$ (Regel 1) und $10100 < 101000$ (Regel 2).

Zum Speichern von Bitstrings kann ein *Radix-Baum* verwendet werden. In Abbildung 1 ist der Radix-Baum für die Bitstrings 1011, 10, 011, 100 und 0 gegeben. Weiße Knoten enthalten im Baum gespeicherte Bitstrings.

Zum Auffinden eines Schlüssels $a = a_0a_1 \dots a_p$, geht man in Tiefe i in den linken Teilbaum, wenn $a_i = 0$ und nach rechts im anderen Fall.

Sei S eine Menge verschiedener Strings aus Binärzahlen mit der Gesamtlänge n . In den folgenden Teilaufgaben sollen Sie einen Algorithmus entwerfen, der mittels Radix-Bäumen S lexikographisch in $\Theta(n)$ sortiert.

Aufgabe 1 a)

3 Punkte

Geben Sie in eine Funktion an, die einen String s in $\Theta(|s|)$ in den Radixbaum einfügt. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus das Kriterium erfüllt.

Aufgabe 1 b)

3 Punkte

Geben Sie in eine Funktion an, die alle Strings im Radixbaum $O(n)$ ausdrückt. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus das Kriterium erfüllt.

Aufgabe 1 c)

1 Punkte

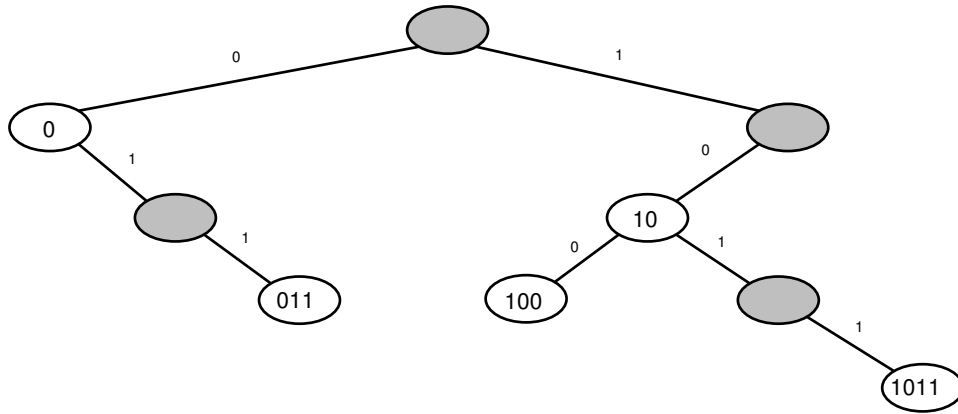


Abbildung 1: Radix-Tree für das Beispiel

Verwenden Sie die Lösungen aus den ersten beiden Teilaufgaben, um zu zeigen, dass die gewünschte Gesamtlauzeit erreicht wird, wenn zuerst alle Strings in S in den Radixbaum eingefügt und anschliessend sortiert ausgedruckt werden.

Aufgabe 2

7 Punkte

Sei b_n die Anzahl der verschiedenen geordneten Binärbäume mit n Knoten. In dieser Aufgabe wird eine Formel untersucht, die die Anzahl der strukturell verschiedenen Binärbäume bestimmt.

Aufgabe 2 a)

3 Punkte

Geben Sie für $n = 1, 2, 3, 4$ die strukturell verschiedenen Binärbäume an.

Aufgabe 2 b)

4 Punkte

Die Anzahl der strukturell verschiedenen Binärbäume kann mit folgender geschlossener Formel berechnet werden:

$$b_n = \frac{1}{1+n} \binom{2n}{n}$$

Zeigen Sie, daß:

$$b_n = \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}\right)$$

Falls Sie keinen Lösungsweg finden, zeigen Sie, daß $b_n = \Omega(2^n)$.

Aufgabe 3

6 Punkte

Aufgabe 3 a)

3 Punkte

Geben Sie den RS-Baum an, der nach dem Einfügen der Schlüssel 17, 25, 31, 7, 12, 19 in einem leeren Baum, entsteht.

Aufgabe 3 b)

3 Punkte

Es sei der RS-Baum aus Aufgabe 3 gegeben, geben Sie die RS-Bäume an, die beim sukzessiven Löschen der Schlüssel 19, 12, 7, 31, 25, 17 entstehen.

Aufgabe 4

7 Punkte

Seien i und i' in einem Intervall-Baum T gespeicherte Intervalle. Das Intervall i' ist das Intervall mit dem kleinsten Anfangspunkt aus der Menge der i überlappenden Intervalle in T . Geben Sie einen effizienten Algorithmus in Pseudo-Code an, der zu einem gegebenen Intervallbaum T und einem Intervall i , das Intervall i' bestimmt. Falls die Menge der überlappenden Intervalle leer ist, soll der Algorithmus *NIL* als Rückgabewert liefern.